

03/03 Recap

$$f'(x); x_i = ih$$

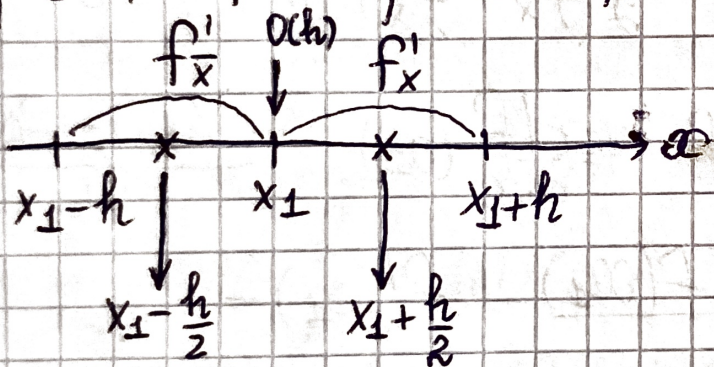
$$f'(x) \sim \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \stackrel{f'_x}{=} \underline{O}(h)$$

$$\frac{f(x) - f(x-h)}{h} = f'_x \Rightarrow \underline{O}(h)$$

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'_x \Rightarrow \underline{O}(h^2)$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2}; x_0 = x_1 - h, x_1, x_2 = x_1 + h$$

$$f(x_0) = f_0, f(x_1) = f_1, f(x_2) = f_2$$



$$f'(x_1 - \frac{h}{2}) \sim \frac{f(x_1) - f(x_1 - h)}{h} = f'_x$$

$$\parallel$$

$$\frac{x_1 + x_0}{2}$$

$$\frac{f(\frac{x_1 + x_0}{2} + \frac{h}{2}) - f(\frac{x_1 + x_0}{2} - \frac{h}{2})}{2 \cdot \frac{h}{2}} = f'_x, \frac{x_1 + x_0}{2}, \frac{h}{2}$$

$$\Rightarrow \underline{O}(h^2)$$

$$(f'(x_1))' \sim [f'_x(x_1 + \frac{h}{2}) - f'_x(x_1 - \frac{h}{2})] \cdot \frac{1}{h}$$

$$f''(x_1) = \left[\frac{f_1 - f_0}{h} + \frac{f_2 - f_1}{h} \right] \frac{1}{h} = \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{h^2}$$

$u(x): U \rightarrow \text{проекция}$

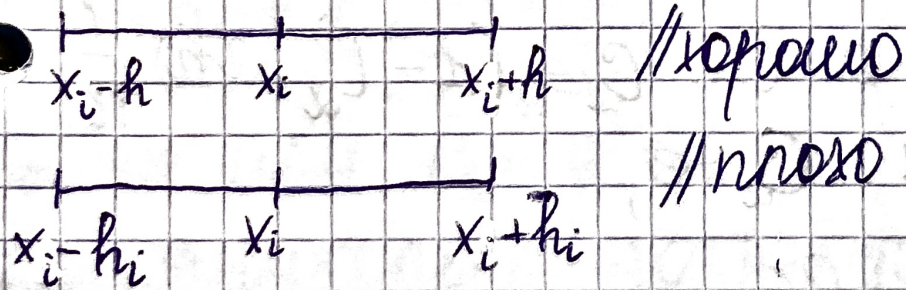
$$u(x_0) = u_0, u(x_1) = u_1, u(x_2) = u_2$$

$u(x)$ — дифференцируемое непрерывное кон-во раз

$$\psi = u''(x_1) = \frac{u(x_1+h) - 2u(x_1) + u(x_1-h))}{h^2}$$

$$= u''(x_1) - \frac{1}{h^2} \left[u(x_1) - hu'(x_1) + \frac{h^2}{2} u''(x_1) - \frac{h^3}{6} u'''(x_1) + O(h^4) - 2u(x_1) + u(x_1) + hu'(x_1) + \frac{h^2}{2} u''(x_1) + \frac{h^3}{6} u'''(x_1) + O(h^4) \right] = u''(x_1) - \frac{1}{h^2} \left[h^2 u''(x_1) + O(h^4) \right] = O(h^2)$$

$$\frac{d^2 u}{dx^2} \sim \frac{u_2 - 2u_1 + u_0}{h^2} = u_{xx} = u_{xx} \text{ (на равномерной сетке)}$$



Решение разностной схемы $\{u_i\}$ наз-ся сходящимся к решению дифф. задачи $u(x)$, if:
 $\|Z_i\| = \|u(x_i) - u_i\| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$,
 где u_i — сеточн. ф-ция,
 $u(x)$ — точное реш-е в т. сетки $x_i = x_0 + ih$

$$\frac{d^3 u}{dx^3} = \left(\frac{d^2 u}{dx^2} \right)'; \left[\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h} - \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h} \right] = \left[u_{xx} - u_{xx} \right] \frac{1}{h} = u_{xxx} - \text{один из вариантов}$$

П.2. Метод неопределенных коэф- фициентов

$$x_0 = 0, x_1 = h, x_2 = 2h$$

Нужно аппроксимировать $f'(x_1) \sim$

$$C_0 f_0 + C_1 f_1 + C_2 f_2, \text{ где}$$

$$f_0 = f(x_0), f_1 = f(x_1), f_2 = f(x_2)$$

$$\text{В общем виде: } f^{(k)}(x_i) = \sum_{j=0}^{k+1} C_j f_j$$

Задача: найти $C_0, C_1, C_2, \dots$

Пример: с помощью точности этой форму-

лы д/полиномов $f=1, f=x, f=x^2, \dots$

$$f'(x_1) \stackrel{!}{=} C_0 f_0 + C_1 f_1 + C_2 f_2, f=1, f=x$$

$$1) f=1; 0 = C_0 + C_1 + C_2$$

$$2) f=x; 1 = C_0 \cdot 0 + C_1 h + C_2 \cdot 2h$$

$$\text{Свобод. пер-р } C_0: C_1 = (1 - C_2 \cdot 2h) \frac{1}{h}$$

$$C_0 + \frac{1 - C_2 \cdot 2h}{h} + C_2 = 0,$$

$$C_0 + \frac{1 - 2hC_2 + hC_2}{h} = 0,$$

$$C_0 = -\frac{1 - hC_2}{h},$$

$$-hC_0 = 1 - hC_2 \Leftrightarrow C_2 = \frac{1 + hC_0}{h} = \frac{1}{h} + C_0$$

$$C_1 = \frac{1}{h} - 2C_2 = \frac{1}{h} - \frac{2}{h} - 2C_0 = -\frac{1}{h} - 2C_0$$

$$C_0, C_1 = -2C_0 - \frac{1}{h}, C_2 = C_0 + \frac{1}{h}$$

$$f'(x_1) = C_0 f_0 + C_1 f_1 + C_2 f_2$$

$$1] C_0 = 0, C_1 = -\frac{1}{h}, C_2 = \frac{1}{h}$$

$$f'(x_1) = \frac{f_2 - f_1}{h} = f'_x$$

$$2] C_2 = 0, C_0 = -\frac{1}{h}$$

$$f'(x_1) = \frac{-f_0 + f_1}{h} = f'_x \Rightarrow O(h)$$

Найти ор-ну $g/1$ производ-й по знач. f в экстр. точк. Точную $g/ f=1, f=x$.

$$f'(x_1) = C_0 f(x_0) + (-2C_0 - \frac{1}{h}) f(x_1) + (C_0 + \frac{1}{h}) \underbrace{f(x_2)}_{f_2}$$

$C_0 = 0$ или $C_2 = 0 \Rightarrow$ то уже была погр. $O(h)$

Дополнительно потребуем точности и на полиноме $f=x^2$. Добавится ур-е:

$$f=x^2; f'(x_1) = 2h = C_0 \cdot 0^2 + C_1 \cdot (h)^2 + C_2 \cdot (2h)^2$$

$$C_1 h^2 + C_2 4h^2 = 2h,$$

$$C_1 h + 4C_2 h = 2,$$

$$C_1 = (2 - 4C_2h) \frac{1}{h} = \frac{2}{h} - 4C_2$$

$$\frac{2}{h} - 4C_2 = -2C_0 - \frac{1}{h}$$

$$-4C_2 = -2C_0 - \frac{3}{h},$$

$$-C_0 = \frac{-4C_2 + \frac{3}{h}}{2}$$

$$C_0 = 2C_2 - \frac{3}{2h} = 2(C_0 + \frac{1}{h}) - \frac{3}{2h} = 2C_0 + \frac{1}{2h}$$

$$C_0 = 2C_0 + \frac{1}{2h} \Leftrightarrow C_0 = -\frac{1}{2h}$$

$$C_1 = -2\left(-\frac{1}{2h}\right) - \frac{1}{h} = 0$$

$$C_2 = -\frac{1}{2h} + \frac{1}{h} = \frac{1}{2h}$$

$$f'(x_1) = \frac{1}{2h} (f_2 - f_0) = f'_x(x_1) \Rightarrow \underline{\underline{O(h^2)}} \text{ верно}$$

$$g/f = 1, f = x, f = x^2$$

Пример

Вторая производная

$$f''(x_1) = c_0 f_0 + c_1 f_1 + c_2 f_2$$

Потреб. точность g / полин. $1, x, x^2$

$$f''(x_1) \sim \frac{f_0 - 2f_1 + f_2}{h^2}$$

$$f=1: 0 = C_0 + C_1 + C_2$$

$$f=x: 0 = C_1 h + C_2 \cdot 2h$$

$$f=x^2: 0 = C_1(h)^2 + C_2(2h)^2$$

Аппр. $f'(x)$ не в централ. точке

$$x_0=0, x_1=h, x_2=2h$$

$$f'(x_0) \sim C_0 f_0 + C_1 f_1 + C_2 f_2$$

Потр. точности $g/f=1, x, x^2$

$$f=1; C_0 + C_1 + C_2 = 0$$

$$f=x; C_1 h + 2h C_2 = 1$$

$$f=x^2; C_1 h^2 + (2h)^2 C_2 = (x^2)'|_{x=0} = 0$$

$$C_0 + C_1 + C_2 = 0$$

$$C_1 + 2C_2 = 1/h, \Leftrightarrow C_1 = \frac{1}{h} - 2C_2,$$

$$C_1 + 4C_2 = 0, \quad -4C_2 = \frac{1}{h} - 2C_2,$$

$$2C_2 = -\frac{1}{h},$$

$$C_2 = -\frac{1}{2h}$$

$$C_1 = \frac{1}{h} - 2\left(-\frac{1}{2h}\right) = \frac{2}{h}$$

$$C_0 = -\frac{3}{2h}$$

$$f'(x_0) = -\frac{3}{2h} f_0 + \frac{2}{h} f_1 - \frac{1}{2h} f_2$$

точно $g/f=1, x, x^2$
($O(h^2)$)

$$f'(x_0) \sim \frac{1}{2h} [-3f_0 + 4f_1 - f_2] = \frac{1}{2h} [(2f_1 - 2f_0) - f_0 + 2f_1 - f_2] = \frac{f_1 - f_0}{h} - \frac{1}{2} \frac{f_0 - 2f_1 + f_2}{h^2} h = f'_x(x_0) - \frac{h}{2} f''_{xx}(x_0)$$

$$f'(0) \sim f'_x(0) - \frac{h}{2} f''_{xx}(1)$$

аннп. нрорубр-в $f'_x(0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h}$

$$= \frac{1}{h} [f(x_0 + h) - f(x_0)] = \frac{1}{h} [f(x_0) + hf'(x_0) +$$

$$+ \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \frac{h^3}{6} f'''(x_0) + \underline{O}(h^4) - f(x_0)] =$$

$$= f'(x_0) + \frac{h}{2} f''(x_0) + \frac{h^2}{6} f'''(x_0) + \underline{O}(h^3)$$

$$f'_x(0) - \frac{h}{2} f''_{xx}(1) = f'(0) + \frac{h}{2} f''(0) + \underline{O}(h^2) -$$

$$- \frac{h}{2} f''_{xx}(1) = f'(0) + \frac{h}{2} (f''(0) - f''_{xx}(1)) + \underline{O}(h^2) =$$

$$= f'(0) + \underline{O}(h^2) \quad \underline{O}(h) \quad (x_0 \neq x_1)$$

Задача $u''(x) - q(x)u(x) = -f(x), 0 < x < 1,$
 $u'(0) = \varphi, u(1) = 0$

$$y_{xx} - q_i y_i = -f(x_i), 1 \leq i \leq N-1, h = \frac{1}{N}, x_i = ih,$$

аннп. $y_p = \underline{O}(h^2)$

$$y_{x,0} - \frac{h}{2} y_{xx,1} = \varphi, \quad y_N = 0 \quad (\Rightarrow) \underline{O(h^2)}$$

Аппр. ур-а $O(h^2)$

Аппр. краев. ур. $\rightarrow O(h) \rightarrow O(h) \quad \begin{matrix} O(h^2) \\ O(h^2) \rightarrow O(h^2) \end{matrix}$

$$u'' = q(x)u(x) - f(x)$$

$$y_{xx}(x_1) = q_1 u(x_1) - f(x_1) + \underline{O(h^2)}$$

$$\text{кр. ур.} : \left[y_{x,0} - \frac{h}{2} [q_1 y_1 - f_1] = \varphi \Rightarrow \underline{O(h^2)} \right]$$

Задействованы 2 m